TP 9 : Le principe de dichotomie

On souhaite résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$ où f est une fonction connue. Lorsque l'on ne sait pas résoudre ce type d'équations algébriquement, on utilise les théorèmes de la bijection ou des valeurs intermédiaires pour s'assurer de l'existence de solutions et trouver un intervalle contenant des solutions.
Dans ce TP, nous présentons la méthode de dichotomie qui permet d'obtenir une valeur **approchée** de la solution d'une telle équation. Cette méthode consiste à réduire, étapes par étapes, la taille de l'intervalle dans lequel se trouve la solution, jusqu'à obtenir un encadrement inférieur à la précision souhaitée.

1 Présentation

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$. Dans la suite, on suppose que f s'annule sur $[a, b]$ en une unique valeur que l'on note α.
L'objectif est de trouver une valeur approchée de α avec la precision ε, c'est-à-dire, trouver un intervalle de longueur ε contenant α.
Pour cela, on calcule le milieu de l'intervalle $[a, b]$ *via* la formule $c = \dfrac{a+b}{2}$. On réduit alors l'intervalle d'étude de moitié en appliquant les deux points suivant :

- si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires, alors la solution cherchée est dans l'intervalle $[a, c]$;
- si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes identiques, alors la solution cherchée est dans l'intervalle $[c, b]$.

On procède ainsi jusqu'à ce que l'on obtienne un intervalle d'amplitude ε.

2 Étude mathématique

Lorsque l'on met en place la méthode de dichotomie présentée ci-dessus, on se retrouve à considérer trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la façon suivante :
$u_0 = a, v_0 = b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et :

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n & \text{si} \quad f(u_n)f(c_n) \leq 0 \\ c_n & \text{si} \quad f(u_n)f(c_n) > 0 \end{cases} \quad , \quad v_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si} \quad f(u_n)f(c_n) \leq 0 \\ v_n & \text{si} \quad f(u_n)f(c_n) > 0 \end{cases}$$

Dans cette partie, nous allons étudier les deux suites présentées ci-dessus pour montrer qu'elles convergent toutes les deux vers α.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{v_n - u_n}{2}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

2) Vérifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell \in [a, b]$.

4) a) Montrer que $f(\ell)^2 \leq 0$.

b) En déduire que $\ell = \alpha$.

3 L'algorithme

Le but de cette partie est de d'écrire un algorithme de dichotomie prenant en paramètres une fonction continue f, deux réels a, b et un réel strictement positif ε et qui renvoie les premières valeurs a_n et b_n vérifiant la condition $b_n - a_n <$ `eps`.
Avant de commencer, on va mettre en pratique la méthode de dichotomie.

Exercice 1

Appliquer le principe de dichotomie à la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x^2 - 2$, en prolongeant le tableau suivant. On prend $\varepsilon = 0.05$.

n	u_n	v_n	c_n	$f(c_n)$	$f(u_n)$	u_{n+1}	v_{n+1}	$v_{n+1} - u_{n+1}$
0	1	2	1,5					
1								

On propose un début d'algorithme. Compléter le pour qu'il réponde au problème.

Python

```python
def dichotomie(f,a,b,eps):
    u=a
    v=b
    while .... :
        c=....
        ...
    return ....
```

Exercice 2

Tester la fonction `Python` précédente sur $f : x \mapsto x^2 - 2$ dans l'intervalle $[1, 2]$ avec une précision de 10^{-3}.

Exercice 3

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{3x} - 3x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-4} de cette solution en utilisant `Python`.

4 Exercices

Exercice 4

Montrer que l'équation $x + \ln x = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déterminer une valeur approchée à 10^{-5}.

Exercice 5

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x^2 - 2$.

1) Représenter la courbe de g sur $[-1, 1]$ avec `Python`.

2) Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ admet-elle sur $[-1, 1]$? Donner un encadrement, obtenu par lecture graphique, à 10^{-1}, de chacune des solutions.

3) Qu'obtient-on si on saisit `dichotomie`$(g, -1, 1, 0.1)$? Expliquer.

4) a) Écrire une fonction `zeros` prenant en argument un entier n, une fonction f, les extrémités a et b d'un intervalle, et la précision ε à laquelle on veut que la fonction renvoie les n plus petites solutions (sous la forme d'une liste `sol`) de l'équation $f(x) = 0$ comprises dans l'intervalle $[a, b]$.

b) Utiliser cette fonction pour déterminer toutes les solutions de $g(x) = 0$ avec la précision $0,001$.