Chapitre 2 : Rappels sur les suites

Vrai ou Faux	
Questions	**Réponses**
1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = -2\times 3^n$ est géométrique.	☐ Vrai ☐ Faux
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Cette suite est décroissante.	☐ Vrai ☐ Faux
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Cette suite est minorée par -1.	☐ Vrai ☐ Faux
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (2-n)^2$ est monotone	☐ Vrai ☐ Faux
5. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence, $u_{n+2} = u_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.	☐ Vrai ☐ Faux

Exercice 1

Calculer les premiers termes des suites suivantes, conjecturer le terme général de la suite en fonction de n :

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n+1}$.

2) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}u_n$.

3) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$.

4) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite (u_n) :

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_{n+1} = u_n + n^2$.

2) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^n$.

3) $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n = 3^n - 1$.

4) $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison inconnue que nous noterons r, et telle que $u_0 = 20$ et $u_4 = 5$.

1) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

2) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par $u_1 = -2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite géométrique.

b) En déduire une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ en fonction de n.

2) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

3) Calculer $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n+6}{u_n+2}$, $n \geq 0$. On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 3}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

2) En déduire l'expression explicite de la suite (u_n).

Exercice 6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$, $n \geq 0$.

1) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n + 2n - 1$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ en fonction de n.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$, $n \geq 0$. On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont différents de -1.

1) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$: $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique.

2) En déduire l'expression explicite de la suite (u_n).

Exercice 8

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}$$

1) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $w_n = u_n + v_n$. Montrer que la suite (w_n) est géométrique, en déduire son expression en fonction de n.

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $v_{n+1} = 3v_n + 3^n$.

3) On considère la suite (z_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$.
Montrer que la suite (z_n) est arithmétique. En déduire l'expression de son terme général.

4) Conclure en donnant les expressions de v_n et de u_n en fonction de n.

Exercice 9

Déterminer le terme général et la limite des suites arithmético-géométriques suivantes :

1) $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + 3$.

2) $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $u_{n+1} = -3u_n - 4$.

3) $u_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

4) $u_2 = -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$: $u_{n+1} = -u_n + 1$.

Exercice 10

Déterminer le terme général des suites suivantes :

1) $u_0 = 3$, $u_1 = 9$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$.

2) $u_1 = -2$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.

3) $u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$.

Exercice 11

Soit $(u_n)n \in \mathbf{N}$ une suite vérifiant la relation de récurrence : (E) $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 6$.
On suppose de plus que $u_0 = u_1 = 0$.

1) Montrer qu'il existe une unique suite constante $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant la relation (E).

2) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $v_n = u_n - c_n$ vérifie la relation : $v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 0$.

3) Déterminer l'expression explicite de v_n en fonction de n. En déduire celle de u_n.