CHAPITRE 8

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

I) Généralités sur les ensembles

En mathématiques, un ensemble est une « collection »d'objets (réels, entiers, fonctions,...) appelés éléments. Il est facile de manipuler un ensemble lorsque l'on a une notation pour le définir. On connait déjà de nombreuses notations pour des ensembles particuliers :

- $\mathbf{N}$: l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbf{Z}$: l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbf{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels (ce sont les nombres qui peuvent s'écrire comme une fraction de deux entiers) ;
- $\mathbf{R}$: l'ensemble des nombres réels.

Vous avez également manipuler d'autres ensembles :

- $[a,b]$ l'intervalle constitué de tous les nombres réels supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b.
- $[\![a,b]\!]$ l'ensemble des nombres entiers supérieurs ou égaux à a et inférieurs ou égaux à b.

Tout au long de l'année, nous introduirons plusieurs autres notations pour des ensembles que l'on rencontrera.
Il existe d'autres ensembles qui ne nécessitent pas de notations particulières, pour ceux là, il existe deux façons de les noter :

- La notation en compréhension : on décrit l'ensemble comme une partie d'un ensemble plus grand formée des éléments vérifiant plusieurs propriétés. Par exemple : $A = \left\{x \in \mathbf{R},\, x^2 \geq 1\right\}$.
- La notation en extension : on décrit l'ensemble par la liste explicite des éléments qui composent cet ensemble. Par exemple : $B = \left\{0, 2, 4, \dots\right\} = \left\{2k,\, k \in \mathbf{N}\right\}$.

Définition 1

Soient E et F deux ensembles.

- On note $e \in E$ pour dire que l'élément e appartient à l'ensemble E.
- L'ensemble ne contenant aucun élément se note $\emptyset$ que l'on nomme ensemble vide.
- Un singleton est un ensemble ne contenant qu'un seul élément.
- On dit que deux ensembles sont égaux s'ils contiennent les mêmes éléments.
- On dit que E est inclus dans F si : $\forall x \in E,\, x \in F$. On note $E \subset F$ et on dit que E est un sous-ensemble de F ou encore que E est une partie de F.
- Deux ensembles E et F sont égaux si, et seulement si, $E \subset F$ **ET** $F \subset E$.

Point méthodologique 1

- Pour montrer une inclusion entre deux ensembles, on prend un élément de A et on montre qu'il appartient à B.
- Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on procède généralement par double inclusions : on montre $A \subset B$ **ET** on montre que $B \subset A$.

Exercice type 1

On considère les deux ensembles suivants : $E = \{x \in \mathbf{R}, (x-4)(2-x) < 0\}$ et $F = \{x \geq 5, x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $F \subset E$. Est ce que $E = F$?

Exercice type 2

On considère deux ensembles : $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 2x - y + 3z = 0\}$ et $F = \{(a-b, 2a+b, b), a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $F = E$.

Définition 2

Soit E un ensemble. Tous les sous-ensembles de E est forment l'ensemble des parties de E et est noté $\mathscr{P}(E)$. Autrement dit :

$$A \in \mathscr{P}(E) \Longleftrightarrow A \subset E.$$

Remarque : L'ensemble vide et E sont toujours deux éléments de $\mathscr{P}(E)$.

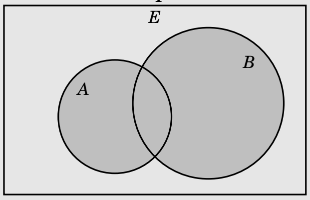
Exemple : *Soit* $E = \{a, b, c\}$, *alors* $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$.

Opérations et ensembles

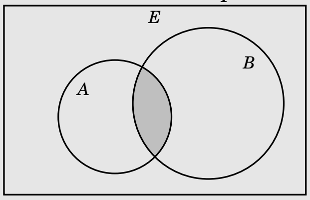
Définition 3

Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.

- La réunion de A et B notée $A \cup B$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans A ou dans B : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$.
  Sur la figure ci-dessous, l'union de A et B correspond à la zone grisée.



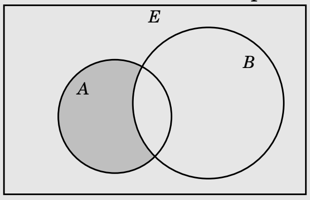
- L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est le sous-ensemble de E constitué des éléments qui sont dans A et dans B : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \textbf{ et } x \in B\}$.
  Sur la figure ci-dessous, l'intersection de A et B correspond à la zone grisée.



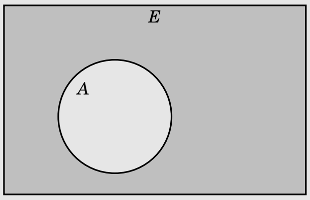
Définition 4

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

- On définit la différence de B dans A l'ensemble : $A \backslash B = \{x \in A, x \notin B\}$.
  Sur la figure ci-dessous, la différence de B dans A correspond à la zone grisée.



- L'ensemble $E \backslash A$ est appelé complémentaire de A dans E. Il est noté $\overline{A}$ ou A^c s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E.
  Sur la figure ci-dessous, le complémentaire de A dans E correspond à la zone grisée.



Proposition 1

Soient A, B et C trois sous-ensembles de E. Alors :

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Définition 5

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ désignent n ensembles, on définit le produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ comme l'ensemble :

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \in E_i\}.$$

Lorsque pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = E$, on note : $E \times \ldots \times E = E^n$.

Remarque : Il ne faut pas confondre les ensembles $\{(1,2)\}$ (qui contient un seul élément) et $\{1,2\}$ (qui en contient deux).

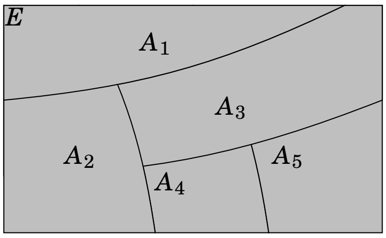
Partition d'un ensemble

Définition 6

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $(A_i)_{i \in I}$ de E vérifiant :

- $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ (on dit que les ensembles sont deux à deux disjoints) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$.

Sur la figure ci-dessous, on a représenté une partition d'un ensemble E.



Exemple : *On note* $P = \{2k, k \in \mathbf{N}\}$ *et* $I = \{2k+1, k \in \mathbf{N}\}$. *La famille* $\{P, I\}$ *forme une partition de* $\mathbf{N}$.

II) Généralités sur les applications

Définition 7

Une application f est :
- un ensemble de départ, que l'on notera E ;
- un ensemble d'arrivée, que l'on notera F ;
- à chaque élément x de E on associe un unique élément de F que l'on note $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'image de x par f. Un antécédent de $y \in F$ par f est un éventuel élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Une application f de E dans F se note $f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Exemple :
- *La fonction* $x \mapsto \sqrt{x-5}$ *est une application de* $[5, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$ *mais aussi de* $]5, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}_+$.
- *La fonction inverse est une application de* $\mathbf{R}^*$ *dans* $\mathbf{R}$ *mais pas une application de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$.

Définition 8

Deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont le **même ensemble de départ** E, **même ensemble d'arrivé** F et si pour tout $x \in E$: $f(x) = g(x)$.

Exercice type 3

Soient f et g deux applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}),\quad g(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{x}).$$

Montrer que les applications f et g sont égales.

Définition 9

Soit E un ensemble. On appelle application identité de E et on note id_E l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E,\ \mathrm{id}_E(x) = x.$$

Définition 10

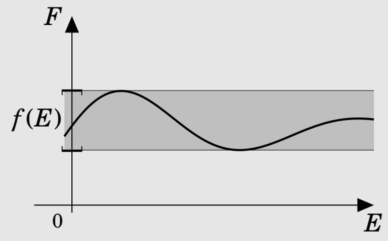
Soit $f : E \to F$ une application et E' un sous-ensemble de E. L'application $g : E' \to F$ définie par $\forall x \in E'$ $g(x) = f(x)$ est appelée restriction de f au sous-ensemble E' et est notée $f_{|E'}$. On dit que f est un prolongement de g à E.

Exemple :

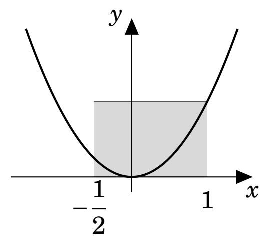
- *Considérons l'application* $f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$. *Alors* $f_{|\mathbf{R}_+} = id_{\mathbf{R}_+}$.
- *L'application* $f: \begin{array}{cc} \mathbf{R}^* & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$ *peut se prolonger en une fonction* $\tilde{f}$ *définie sur* $\mathbf{R}$ *en posant* $\tilde{f}(0) = 0$.

Définition 11 (Image directe)

Soient $f: E \to F$ une application et A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A par f, la partie de F, notée $f(A)$, définie par : $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.
En particulier, $f(E) = \mathrm{Im} f$ est appelée image de f.



Exemples : *On considère l'application* $f: \begin{array}{cc} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$. *Notons que pour tout* $x \in \mathbf{R}$, $x^2 \geq 0$. *Ainsi* $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}_+$. *On peut également montrer que tout élément de* $\mathbf{R}_+$ *admet un antécédent dans* $\mathbf{R}$ *par* f *(c'est la définition de la racine carrée), ainsi* $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$.
Avec une étude similaire, on peut montrer que $f([-1/2, 1]) = [0, 1]$, *ce qui est illustré sur la figure ci-contre.*



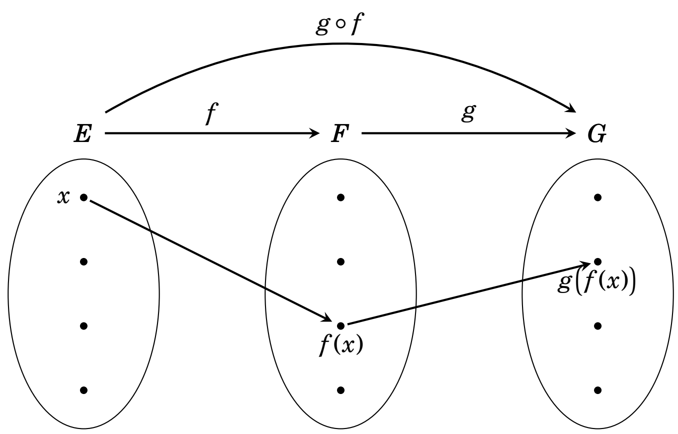
Composée de deux applications

Définition 12

Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications. La composée de g et f est l'application :

$$\begin{array}{rl} g \circ f : & E \to G \\ & x \mapsto g[f(x)] \end{array}$$

Illustration :



Remarque : Lorsque l'application $g\circ f$ existe, $f\circ g$ n'existe pas forcément. Si jamais les deux existent, en général, $f\circ g \neq g\circ f$.

Exemple : *On considère les deux applications :* $f: \begin{array}{ll}\mathbf{R} & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto x^2\end{array}$ *et* $g: \begin{array}{ll}\mathbf{R}_+ & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x}\end{array}$.

Alors :

$$f\circ g: \begin{array}{ll}\mathbf{R}_+ & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{x}^2\end{array}, \quad g\circ f: \begin{array}{ll}\mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2}\end{array}$$

$f\circ g = id_{\mathbf{R}_+}$ *et* $g\circ f = |\cdot|$.

Injectivité

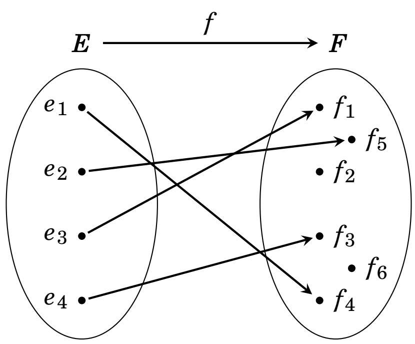
Définition 13

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est injective si :

$$\forall (x,x') \in E^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

On retiendra plutôt que :
f est injective si, et seulement si, $\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Illustration :



Remarque : Soit $f : E \to F$ une application. On peut reformuler la définition d'injectivité de f de deux manières :
- Tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
- Pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E.

Exemples : *L'application identité de E est injective.*
L'application $f: \begin{array}{ll}\mathbf{R} & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto x^2\end{array}$ *n'est pas injective car* $f(-1) = f(1)$.
Par contre, $g: \begin{array}{ll}\mathbf{R}_+ & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto x^2\end{array}$ *est injective.*

Exercice type 4

Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 5x - 2$ est injective.

Proposition 2

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives, alors $g\circ f$ est injective.

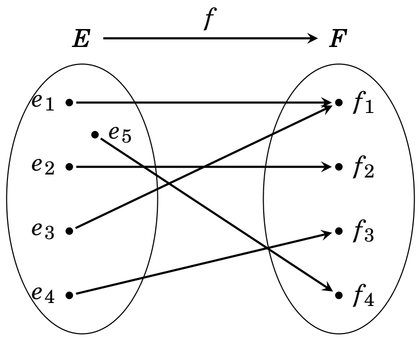
Surjectivité

Définition 14

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. Autrement dit l'application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ \ f(x) = y.$$

Illustration :



Exemple : *L'application* $f : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ *est surjective, mais l'application* $f : \begin{array}{ll} \mathbf{R} & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ *ne l'est pas car* -1 *n'admet aucun antécédent.*

Exercice type 5

Montrer que l'application $f : \mathbf{R}\backslash\{2\} \to \mathbf{R}\backslash\{1\}$, $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ est surjective.

Proposition 3

Soient $f : E \to F$. f est surjective si, et seulement si, $f(E) = F$.

Proposition 4

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

Bijectivité

Définition 15

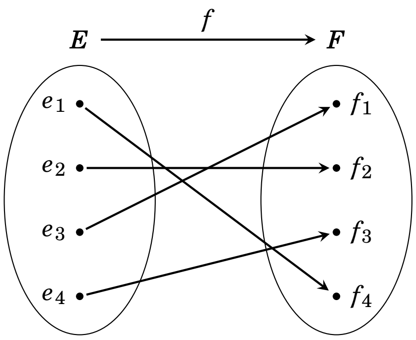
Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est bijective si elle est injective et surjective. Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet exactement un antécédent par f.
L'application $f : E \to F$ est donc bijective si et seulement si :

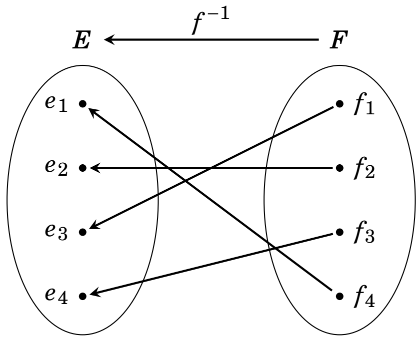
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ \ f(x) = y.$$

Théorème 1

Une application $f : E \to F$ est bijective si, et seulement si, il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. L'application g est alors appelée application réciproque de f et est notée f^{-1}.

Illustration :





Exemples : • *L'application* $f: \begin{array}{cl} \mathbf{R}_+ & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ *est bijective son application réciproque est* $f^{-1}: \begin{array}{cl} \mathbf{R}_+ & \to \mathbf{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}$.

• *La fonction logarithme népérien est une bijection de* $\mathbf{R}_+^*$ *sur* $\mathbf{R}$. *Sa bijection réciproque est la fonction exponentielle définie sur* $\mathbf{R}$ *à valeur dans* $\mathbf{R}_+^*$.
On sait que dans un repère orthonormé, les courbes représentant ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. *C'est une propriété des bijections réciproques.*

Proposition 5

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice type 6

Montrer que l'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x - 2$ est bijective et déterminer la réciproque.

Exercice type 7

Montrer que l'application $f : \mathbf{R}\setminus\{3\} \to \mathbf{R}\setminus\{2\}$, $x \mapsto \dfrac{2x-1}{x-3}$ est bijective et déterminer la réciproque.