CHAPITRE 2

LES SUITES NUMÉRIQUES

I) Généralités sur les suites

1) Définition

Définition 1

Une suite réelle est une application d'une partie A de $\mathbf{N}$ à valeur dans $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} u : A &\to \mathbf{R} \\ n &\mapsto u(n) := u_n \end{aligned}$$

On peut la noter u, $(u_n)_{n\in A}$ ou encore (u_n) s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarques :
- Si A est fini, la suite $(u_n)_{n\in A}$ est une suite finie ;
- Il est important de différencier u_n qui est le terme de rang n de la suite et $(u_n)_{n\in A}$ qui désigne la suite en entier.

Exemple : *Considérons la suite des nombres pairs. Alors $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, … On remarque alors que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2n$.*

Dans la suite de ce chapitre, A désigne une partie non vide de $\mathbf{N}$.

2) Modes de définition d'une suite

Il existe plusieurs procédés pour définir une suite réelle :

Définition 2 (Définition explicite)

Une suite peut être définie explicitement, c'est-à-dire en fournissant une formule générale exprimant n'importe quel terme en fonction de son rang : $\forall n \in A$, $u_n = f(n)$.

Exemple : *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 3}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n(n-2)}$, $n \geq 3$. Cette suite est définie à partir du rang $n = 3$. On a donc : $u_3 = \dfrac{1}{3}$, $u_5 = \dfrac{1}{15}$.*

Exercice type 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $u_n = 2^{-n}$. Calculer les 3 premiers termes de la suite.

Exercice type 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par : $u_n = n^2 + 2n$. Exprimer, pour tout entier n, le terme u_{n+1} en fonction de u_n.

Définition 3 (Définition par récurrence)

Une suite peut être définie par récurrence, c'est-à-dire en fournissant le premier terme et une formule générale exprimant n'importe quel terme en fonction du terme qui le précède. On a une relation de la forme : $\forall n \in A,\ u_{n+1} = g(u_n)$.

Exemple : *Soit la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par :* $\begin{cases} u_1 & = 0 \\ u_{n+1} & = -2u_n + 3,\ \forall n \geq 1 \end{cases}$

Alors $u_2 = 3$ *et* $u_3 = -3$. *Le calcul de* u_{17} *nécessiterait le calcul préalable des 16 termes précédents.*

Remarque : Il est possible aussi que la définition par récurrence fasse intervenir plusieurs des termes précédents ou bien qu'elle dépende à la fois des termes précédents et de n. Exemple : $u_{n+1} = u_n + n$.

3) Les variations d'une suite

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in A}$ est :
- croissante si pour tout entier $n \in A$: $u_{n+1} \geq u_n$;
- décroissante si pour tout entier $n \in A$: $u_{n+1} \leq u_n$;
- constante si pour tout entier $n \in A$: $u_{n+1} = u_n$;
- monotone si elle est croissante OU décroissante.

Exercice type 3

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = -n^2 + 1$.

Exercice type 4

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Remarque : On peut également s'intéresser à la monotonie à partir d'un certain rang. Par exemple, considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = -(n-1)(n-5)$. Les premiers termes de cette suite sont $v_0 = -5$, $v_1 = 0$, $v_2 = 3$, $v_3 = 4$ mais $v_4 = 3$. La suite n'est donc ni croissante ni décroissante. Néanmoins :

$$v_{n+1} - v_n = -2n + 5.$$

Or $-2n + 5 < 0$ dès que $n \geq 3$. On en déduit que la suite est décroissante à partir du rang $n = 3$.

4) Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n\in A}$ est :
- *majorée* s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in A$, $u_n \leq M$;
- *minorée* s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in A$, $m \leq u_n$;
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarques :
- Les réels M et m ne sont pas uniques.
- Les constantes ne doivent pas dépendre du rang n.

Exercice type 5

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Proposition 1

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite numérique. On a alors :

$$(u_n)_{n\in A} \text{ est bornée } \iff \exists M > 0,\ \forall n \in A,\ |u_n| \leq M.$$

Exercice type 6

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

5) Opérations sur les suites

Définition 6

Soient $(u_n)_{n\in A}$ et $(v_n)_{n\in A}$ deux suites réelles et λ un nombre réel constant (il ne dépend pas du rang de la suite). Alors, on peut définir les opérations suivantes sur les suites :

- **l'addition** :
$$(u_n)_{n\in A} + (v_n)_{n\in A} = (u_n + v_n)_{n\in A}$$
- **la multiplication** :
$$(u_n)_{n\in A} \times (v_n)_{n\in A} = (u_n \times v_n)_{n\in A}$$
- **la multiplication par une constante** :
$$\lambda (u_n)_{n\in A} = (\lambda u_n)_{n\in A}$$

De plus, on dit que les deux suites $(u_n)_{n\in A}$ et $(v_n)_{n\in A}$ sont égales si :

$$\forall n \in A,\ u_n = v_n.$$

Exercice type 7

Montrer que le produit de deux suites bornées donne encore une suite bornée. La réciproque est-elle vraie ?

II) Les suites numériques classiques

1) Suites arithmétiques

Définition 7

Une suite $(u_n)_{n\in A}$ est dite arithmétique s'il existe une constante $r \in \mathbf{R}$ (appelée raison de la suite) telle que, pour tout entier $n \in A$:

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Exemples :

- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$ est une suite arithmétique.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + n$ n'est pas une suite arithmétique.*

Proposition 2 (Formule explicite)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 + nr.$$

Remarque : On peut également exprimer u_n en fonction de u_p pour $p < n$:

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

Cette formule s'avère notamment pratique lorsque le premier terme de la suite n'est pas u_0.

Point méthodologique 1

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in A}$ est arithmétique, on montre que la **différence** de deux termes consécutifs est constant. La constante obtenue est la raison de la suite.

Propriété 1 (Variations)

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite arithmétique de raison r. Alors la suite $(u_n)_{n\in A}$ est :
- **croissante** si, et seulement si, la raison r est positive ;
- **décroissante** si, et seulement si, la raison est négative.

Démonstration. A faire en exercice. □

Proposition 3 (Somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite arithmétique. Alors, pour tout $n \in A$ et $m \in A$ tels que $m < n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n \\ &= (n-m+1)\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right).\end{aligned}$$

Remarque : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite arithmétique et $n \in \mathbf{N}$, alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

Exercice type 8

Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k$.

2) Suites géométriques

Définition 8

Une suite $(u_n)_{n\in A}$ est dite géométrique s'il existe une constante $q \in \mathbf{R}$ (appelée raison de la suite) telle que, pour tout entier $n \in A$:

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Exemples :
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$ est une suite géométrique.*
- *La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = nu_n$ n'est pas une suite géométrique.*

Proposition 4 (Formule explicite)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Remarque : On peut également exprimer u_n en fonction de u_p pour $p < n$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Cette formule s'avère notamment pratique lorsque le premier terme de la suite n'est pas u_0.

Proposition 5 (Somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors, pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right).$$

Démonstration. On calcule $(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) = 1-q+q-q^2+q^2-\ldots-q^n+q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}$. Comme $1-q \neq 0$, on a :

$$1+q+q^2+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \ldots + u_0 q^n = u_0(1+q+q^2+\ldots+q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

□

Remarque : Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et m et n deux entiers de A tels que $m < n$. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_m \left(\frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} \right).$$

Exercice type 9

Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ pour $n \in \mathbf{N}^*$;

2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$ pour $n \in \mathbf{N}$;

3) $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{kx}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice type 10

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -2u_n + 1$.

1) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire une expression explicite de (u_n) en fonction de n.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) a) Calculer la somme $v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b) en déduire $u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) Suites arithmético-géométriques

Définition 9

Une suite $(u_n)_{n\in A}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe deux constantes $a \in \mathbf{R}\setminus\{0,1\}$ et $b \in \mathbf{R}^*$ telles que, pour tout entier $n \in A$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b.$$

Point méthodologique 2

Pour déterminer la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique vérifiant pour tout entier $n \in A$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b,$$

on suivra les étapes suivantes :

1. On résout l'équation $ax + b = x$ d'inconnue x. On notera l la solution de cette équation. On a donc :
$$l = al + b.$$
2. On introduit la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in A}$, définie par $v_n = u_n - l$, pour tout entier $n \in A$. On montre alors que $(v_n)_{n\in A}$ est une suite géométrique de raison a.
3. On en déduit l'expression explicite de la suite $(v_n)_{n\in A}$.
4. On en déduit l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in A}$ en remarquant que pour tout entier $n \in A$:
$$u_n = v_n + l.$$

Exercice type 11

Déterminer l'expression explicite de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3,\ n \geq 0 \end{cases}$$

4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 10

Une suite $(u_n)_{n\in A}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}^*$ telles que, pour tout entier $n \in A$:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

Remarques :

- Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est totalement déterminée par les valeurs de ses deux premiers termes.
- Pour trouver le terme général de ces suites, on utilisera l'équation caractéristique :

$$(E)\ \ r^2 - \alpha r - \beta = 0.$$

Théorème 1

Soit $(u_n)_{n\in A}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique (E). On note Δ son discriminant, alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Alors, il existe deux réelles λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une unique solution réelle r_0. Alors, il existe deux réelles λ et μ tels que :
$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r_0^n.$$

Les constantes λ et μ se déterminent en utilisant les valeurs de 2 termes de la suite, en général les deux premiers.

Exercice type 12

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression du terme général de la suite (u_n) définie par :

1) $\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 0 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n,\ n \geq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = -2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,\ n \geq 0 \end{cases}$

Exercice type 13

Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 6v_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$.