Logique et raisonnements mathématiques

L'objectif de cette partie est de présenter le vocabulaire et quelques propriétés de logique qui seront largement utilisés dans la suite. Aucun développement théorique ne sera fait.

I) Propositions mathématiques et assertions.

On appelle proposition mathématique un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux). Deux propositions sont dites équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité (vrai ou faux).

Exemple : *Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques :*
- $1+1=2$*, cette proposition est vraie.*
- $1+1=3$*, cette proposition est fausse.*
- $\pi=3.14$*, cette proposition est fausse.*

Par contre, $1+1$ *n'est pas une proposition puisqu'on ne peut pas lui attribuer de valeur de vérité. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.*

Définition 1

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux propositions mathématiques.
- **ET** : la proposition « $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{Q}$ » est vraie lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont vraies et fausse sinon.
- **OU** : la proposition « $\mathscr{P}$ *ou* $\mathscr{Q}$ »est vraie lorsque au moins une des propositions est vraie.
- Un **prédicat** (ou propriété), est un énoncé mathématique dépendant d'une ou de plusieurs variables.

Exemple : *« $\sqrt{x^2}=x$ »est un prédicat, cette propriété est vraie pour tout x plus grand que* 0*, mais est fausse sinon.*

Pour définir les prédicats, il existe deux symboles mathématiques, appelés quantificateurs :
- Le quantificateur universel $\forall$ signifie « pour tout ».
- Le quantificateur existentiel $\exists$ signifie « il existe ».

ATTENTION!
Les symboles $\forall$ et $\exists$ ne sont pas des abréviations et ne doivent pas être utilisés dans une phrase « en français ».

Remarque : On peut aussi écrire « $\exists!$ » pour dire « il existe un unique ».

L'ordre des quantificateurs est essentiel : on ne peut intervertir, sans justification précise, que deux quantificateurs de même nature :
Les propositions : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists y \in \mathbf{R} / y > x$ et $\exists y \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R} / y > x$ ne sont pas équivalentes.

Définition 2 (Négation)

La proposition *non* $\mathscr{P}$ qui est vraie lorsque $\mathscr{P}$ est fausse et est fausse lorsque $\mathscr{P}$ est vraie est appelée **négation** de $\mathscr{P}$.

Exemple : *On considère la proposition $\mathscr{P}$: « tous les élèves de la classe ont eu la moyenne au dernier devoir », la négation de $\mathscr{P}$ est* non $\mathscr{P}$ *: « au moins un élève n'a pas eu la moyenne au dernier devoir ».*

À partir de cette définition, on peut vérifier que les propositions :
- *non* $[\forall x, \mathscr{P}(x)]$ et $\exists x$, *non* $\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes ;
- *non* $[\exists x, \mathscr{P}(x)]$ et $\forall x$, *non* $\mathscr{P}(x)$ sont équivalentes ;
- *non* $[\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{Q}]$ et $[$*non* $\mathscr{P}$ ou *non* $\mathscr{Q}]$ sont équivalentes ;
- *non* $[\mathscr{P}$ *ou* $\mathscr{Q}]$ et $[$*non* $\mathscr{P}$ *et non* $\mathscr{Q}]$ sont équivalentes.

Exemple : *La négation de la proposition $\mathscr{P}$: « il fait froid et il y a du vent » est* non $\mathscr{P}$ *: « il ne fait pas froid ou il n'y a pas de vent ».*

On dit qu'une proposition $\mathscr{P}$ implique une proposition $\mathscr{Q}$, on note : $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, si à chaque fois que $\mathscr{P}$ est vraie, $\mathscr{Q}$ l'est aussi. On dit alors que :

— $\mathscr{P}$ est une *condition suffisante* de $\mathscr{Q}$.
— $\mathscr{Q}$ est une *condition nécessaire* de $\mathscr{P}$.

Remarque : Si $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \Longrightarrow \mathscr{P}$, on note $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$. Les propositions $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont alors équivalentes.

Exemple : *On considère les propositions $\mathscr{P}$: « il pleut » et $\mathscr{Q}$: « il y a des nuages ». Alors, $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$, autrement dit $\mathscr{P}$ est une* condition suffisante *de $\mathscr{Q}$. Cependant, ces deux propositions ne sont pas équivalentes car il peut y avoir des nuages et ne pas pleuvoir (on a alors $\mathscr{Q}$ vraie et $\mathscr{P}$ fausse).*

II) Montrer une implication

Dans cette partie, on se propose de présenter plusieurs façons de démontrer l'implication « $\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}$ ».

Démonstration « directe »

Pour démontrer une implication par déduction, on se base sur la propriété de transitivité suivante :

$$\text{Si } \left[\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q} \text{ et } \mathscr{Q} \Rightarrow \mathscr{R}\right] \text{ alors } [\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{R}].$$

Concrètement, pour démontrer cette implication, on suppose que $\mathscr{P}$ est vraie et, en utilisant des implications simples, on aboutit à la conclusion.

Exemple : *Pour $x \in \mathbf{R}$, on a : $x > 2 \Rightarrow 3x - 1 > 4$.*
Si $x > 2$ est vraie, alors $3x > 6$ l'est aussi.
Si $3x > 6$ est vraie, alors $3x - 1 > 5$ l'est aussi et donc $3x - 1 > 4$.
Finalement, on a bien :

$$x > 2 \Rightarrow 3x - 1 > 4.$$

Démonstration par disjonction de cas

Pour montrer l'implication « $[\mathscr{P}_1 \text{ ou } \mathscr{P}_2 \text{ ou } \dots \text{ ou } \mathscr{P}_n] \Longrightarrow \mathscr{Q}$ », on montre successivement les implications « $\mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{Q}$ »pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Exemple : *Montrons que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3. Pour cela, remarque qu'un nombre entier quelconque peut s'écrire de 3 façons possibles : $3k$, $3k+1$ ou $3k+2$ où $k \in \mathbf{N}$. On va donc procéder par disjonction de cas :*
— *s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 3k$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3k(n+1)(2n+1)$ qui est bien divisible par 3 ;*
— *s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 3k+1$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3(2k+1)n(n+1)$ qui est bien divisible par 3 ;*
— *s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $n = 3k+2$, alors : $n(n+1)(2n+1) = 3(k+1)n(2n+1)$ qui est bien divisible par 3.*
On en déduit que le propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration par contraposée

On appelle contraposée de l'implication $[\mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{Q}]$ l'implication **équivalente** [non $\mathscr{Q} \Longrightarrow$ non $\mathscr{P}$].

Exemple : *On considère l'implication : S'il pleut, alors il y a des nuages. La contraposée de cette implication est : s'il n'y a pas de nuage, alors il ne pleut pas.*

Dans certaines circonstances, pour montrer une implication, il peut être plus simple de montrer la contraposée.

Exemple : *Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair. On va montrer la contraposée, c'est-à-dire : si n est impair alors n^2 est impair.*
On suppose qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que : $n = 2k+1$. On a alors :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 2.$$

Il est clair que $2k^2 + 2k$ est un entier naturel, ce qui prouve que n^2 est un nombre impair.

Le raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer la proposition $\left(\mathscr{P} \text{ et } \textit{non } \mathscr{Q}\right)$ et en déduire une contradiction.

Exemple : *Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrer que si $\forall \varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$, alors $x \leq 0$. On va procéder par l'absurde. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, $x \leq \varepsilon$ et $x > 0$. Comme x est strictement positif, on en déduit que $x > \dfrac{x}{2}$, et, en prenant $\varepsilon = \dfrac{x}{2}$, on a : $x \leq \dfrac{x}{2}$. On aboutit à une contradiction, ce qui prouve le résultat souhaité.*

Démontrer une équivalence

Pour montrer l'équivalence $\mathscr{P} \Longleftrightarrow \mathscr{Q}$, on montre les deux implications séparément.

Exemple : *Soit A un réel positif et B un réel quelconque. Montrer l'équivalence :*

$$\sqrt{A} = B \Longleftrightarrow \left[A = B^2 \text{ et } B \geq 0\right].$$

($\Rightarrow$) *On suppose que $\sqrt{A} = B$. Par définition de la racine carrée, $A = B^2$ et $\sqrt{A}$ est positif, et donc B aussi.*
($\Leftarrow$) *On suppose que $A = B^2$ et $B \geq 0$. Alors : $\sqrt{A} = \sqrt{B^2} = |B|$. Comme B est un réel positif, on a : $|B| = B$, d'où : $\sqrt{A} = B$.*

III) Les raisonnements à connaître

Dans cette première partie nous allons présenter des démonstrations classiques qu'il faut maîtriser en vue de résoudre les problèmes à venir dans les différents chapitres.

1) Le contre-exemple

On peut montrer qu'un prédicat universel : $\left(\forall x,\ \mathscr{P}(x)\right)$, est faux en trouvant un contre-exemple : une valeur de x pour laquelle $\mathscr{P}(x)$ est fausse. C'est un principe important à comprendre et utiliser pour vérifier certaines propriétés :

Exemple : *Le prédicat suivant : pour tout réels positifs x et y, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ est faux. Cela ne fonctionne pas pour $x = 1$ et $y = 1$.*

Exemple : *La proposition « toutes les suites numériques sont croissantes » est fausse, en effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par $u_n = -2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, est décroissante.*

2) Les problèmes d'existence et/ou d'unicité

Prouver l'existence d'un objet mathématique vérifiant certaines propriétés est en théorie assez simple, il suffit d'exhiber un tel objet. En pratique, cela peut s'avérer être très compliqué, car ne pas trouver d'exemple ne prouve pas qu'il n'en existe pas. Les preuves d'unicité sont quant à elles plus « systématiques » : on suppose qu'il existe deux objets vérifiant la proposition et on montre qu'ils sont égaux.

Exemple : *Montrer qu'il existe un unique réel positif x tel que $x^2 = 1$.*
Existence *: le réel $x = 1$ convient.*
Unicité *: on suppose qu'il existe deux réels positifs x et x' tels que $x^2 = x'^2 = 1$. Alors : $x = x'$ ou $x = -x'$. La seconde relation est exclue car alors x ou $-x'$ serait négatif. On en déduit que $x = x'$.*

Le raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on veut démontrer une proposition $\mathscr{P}$ et que l'on n'a pas d'idée pour démarrer notre preuve (c'est notamment le cas lorsque l'on souhaite montrer l'existence d'un objet), on peut procéder en deux temps :

- L'**analyse** : On suppose que la proposition $\mathscr{P}$ est vraie et on en déduit des conditions nécessaires pour que cette proposition puisse effectivement être vraie.
- La **synthèse** : On vérifie que les conditions trouvées précédemment permettent bien de démontrer cette proposition.

Dans le cadre d'une preuve d'existence et d'unicité, l'analyse sert à déterminer des conditions sur l'objet recherché : on dresse son portrait robot. La synthèse, elle, permet de vérifier que cet objet fonctionne et que l'on ne s'est pas trompé de coupable.
Dans cette situation, l'analyse revient à prouver l'unicité de l'objet et la synthèse prouve l'existence.

Le raisonnement par analyse-synthèse s'avère aussi très utile pour résoudre des équations :

Exemple : *Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$ pour $x \in \mathbf{R}$.*
Analyse *: Soit un réel x tel que $\sqrt{x+2} = x$. Alors x est une solution de l'équation du second degré : $x + 2 = x^2$ dont les racines sont : $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. On en déduit que x est soit égal à -1, soit à -2.*
Synthèse *: On vérifie si les deux candidats de l'analyse sont des solutions de l'équation. 2 convient parfaitement, par contre -1 ne fonctionne pas, en effet : $\sqrt{-1+2} = 1 \neq -1$.*
Finalement, l'équation $\sqrt{x+2} = x$ admet une unique solution réelle qui est 2.