ECE1

Devoir maison n° 1 : **Corrigé**

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1} \end{cases}$$

1)

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{2u_0 + 1}{u_0 + 1} = \frac{3}{2};$$

$$u_2 = \frac{2u_1 + 1}{u_1 + 1} = \frac{2 \times 3/2 + 1}{3/2 + 1} = \frac{4}{5/2} = \frac{8}{5};$$

$$u_3 = \frac{2u_2 + 1}{u_2 + 1} = \frac{16/5 + 1}{8/5 + 1} = \frac{21/5}{13/5} = \frac{21}{13}.$$

2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}^+$ (le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble). De plus, $\forall x \in \mathbf{R}^+$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbf{R}^+$, donc f est strictement croissante sur f. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0	$+\infty$
f	1 $\nearrow$	

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$ ». Montrons par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 1.$$

On a bien : $1 \leq u_0 \leq 2$.
$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. D'après l'hypothèse de récurrence u_n existe et $1 \leq u_n \leq 2$. Ainsi $u_n + 1 \neq 0$, il est donc possible de calculer $\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$. On en déduit que u_{n+1} existe.
De plus, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, ainsi :

$$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(2).$$

Or : $f(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f(2) = \dfrac{5}{3}$. Ainsi :

$$1 \leq f(1) \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \leq 2.$$

On en déduit que la $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et que la propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, d'après le principe de récurrence simple, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ u_n \text{ existe et } 1 \leq u_n \leq 2.$$

4) On utilise un raisonnement par récurrence :
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{Q}(n)$: « $u_n \leq u_{n+1}$ ». Montrons par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = \frac{3}{2}.$$

On a bien : $u_0 \leq u_1$.
$\mathcal{Q}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{Q}(n+1)$ l'est aussi.
D'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on a : $u_n \in [1, 2]$ et $u_{n+1} \in [1, 2]$.
De plus, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, ainsi :

$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

On en déduit que la $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie et que la propriété est héréditaire.
Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, d'après le principe de récurrence simple, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \leq u_{n+1}.$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

5) Voici un programme qui répond à la question :

Python

```python
def suite(n):
    U = 1
    for k in range(n):
        U = (2*U+1)/(U+1)
    return U
```

Exercice 2

Étudier complètement la fonction $f \mapsto \sqrt{x}^{1/x}$ sur son domaine de définition.

• On commence par déterminer le domaine de définition de la fonction f :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{x})/x} = \mathrm{e}^{\ln(x)/(2x)} \text{ existe si et seulement si } \ln(x) \text{ existe et } x \neq 0.$$

On en déduit que :

$$f(x) \text{ existe si et seulement si } x > 0 \text{ et } x \neq 0.$$

On en déduit le domaine de définition de la fonction f :

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]0; +\infty[.}$$

• La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et f est sous la forme e^u où :

$$u(x) = \frac{\ln(x)}{2x}, \text{ soit } u'(x) = \frac{\frac{2x}{x} - 2\ln(x)}{4x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{2x^2}.$$

On en déduit la fonction dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{(1 - \ln(x))}{2x^2}\mathrm{e}^{\ln(x)/(2x)}.$$

Une exponentielle et un carré sont toujours positifs. Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. On cherche le signe de cette expression :

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq \ln(x) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e} \geq x \text{ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbf{R}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de la fonction f :

x	0		e		$+\infty$
$1-\ln(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Enfin :

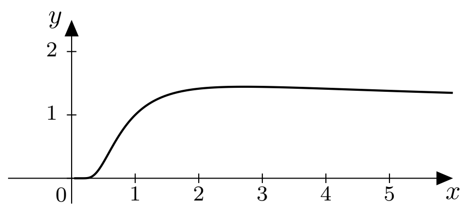
$$f(\mathrm{e}) = \sqrt{\mathrm{e}}^{1/\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-1}/2} = \alpha.$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		e		$+\infty$
f			α		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	1

Remarque :
La courbe admet donc une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et est prolongeable par continuité en 0.

Voici une allure de sa courbe :



Exercice 3

Voici un programme qui répond à la question :

Python

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(1,n+1):
        S = S + n**2/(n**2+k**2)
    return S/n
```